Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial

Vibraciones en máquinas

José Antonio Lozano Ruiz

Vibraciones en máquinas

OBJETIVOS

A) Estudio de las **vibraciones en ejes y árboles**.

B) Concepto de **velocidad crítica**.

C) Estudio de métodos de **cálculo** o estimación de frecuencias críticas en árboles de transmisión.

Vibraciones en máquinas

Contenido:

7.1. Introducción.

7.2. Vibración forzada causada por fuerzas centrífugas. Concepto de resonancia y de velocidad crítica.

7.3. Cálculo de frecuencias naturales a flexión en árboles de transmisión.

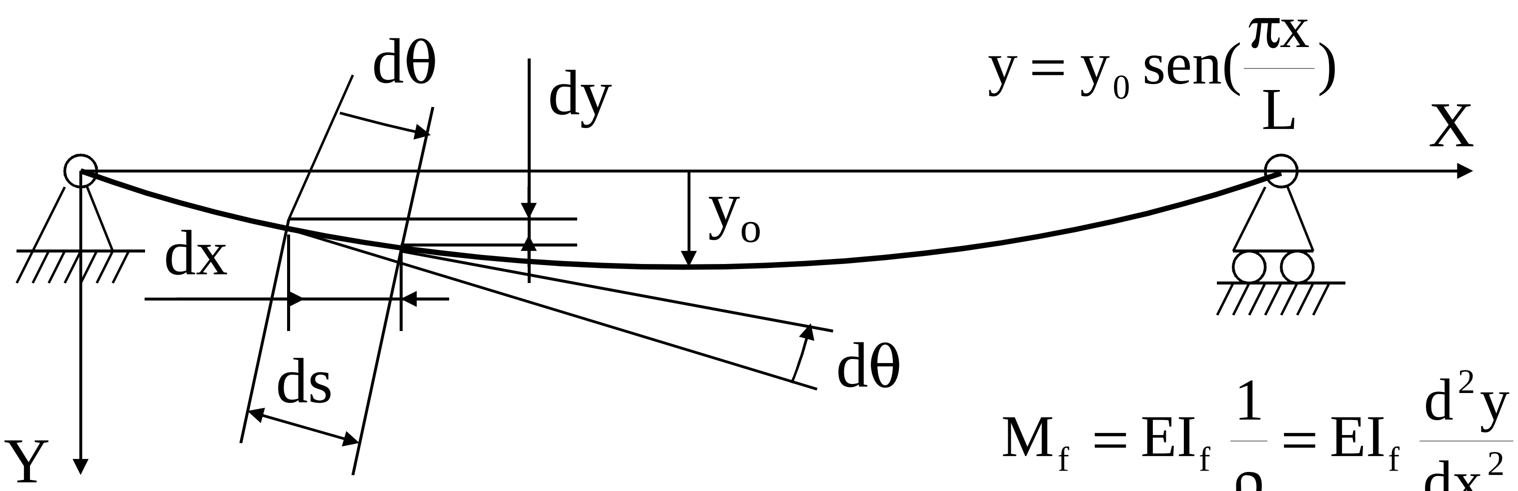
7.4. Cálculo de frecuencias naturales a torsión en árboles de transmisión.

Cálculo de frecuencias naturales a flexión

A) Árboles de sección constante y masa distribuida uniformemente.

B) Árboles con masas concentradas.

ω_n de flexión en árboles de sección constante y masa distribuida uniformemente



$$y = y_0 \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$M_f = EI_f \frac{1}{\rho} = EI_f \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\theta \approx \mathrm{tg}\,\theta = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \;\Rightarrow\; d\theta = \frac{d^2y}{dx^2}dx$$

$$dEp = \frac{1}{2}M_f\,d\theta \;\Rightarrow\; \boxed{dEp = \frac{1}{2}M_f\,d\theta = \frac{1}{2}EI_f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}$$

$$dm = \mu dx \;\Rightarrow\; v = \omega_n y \;\Rightarrow\; \boxed{dEc = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}\mu\omega_n^2 y^2 dx}$$

ω_n de flexión en árboles de sección constante y masa distribuida uniformemente

$$\left.\begin{aligned} Ep_{MAX} &= \frac{1}{2} EI_f \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \\ Ec_{MAX} &= \frac{1}{2} \mu \omega_n^2 \int_0^L y^2 dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

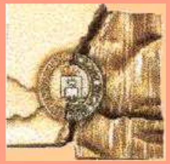
Método de Rayleigh

$$\boxed{Ec_{MAX} = Ep_{MAX}}$$

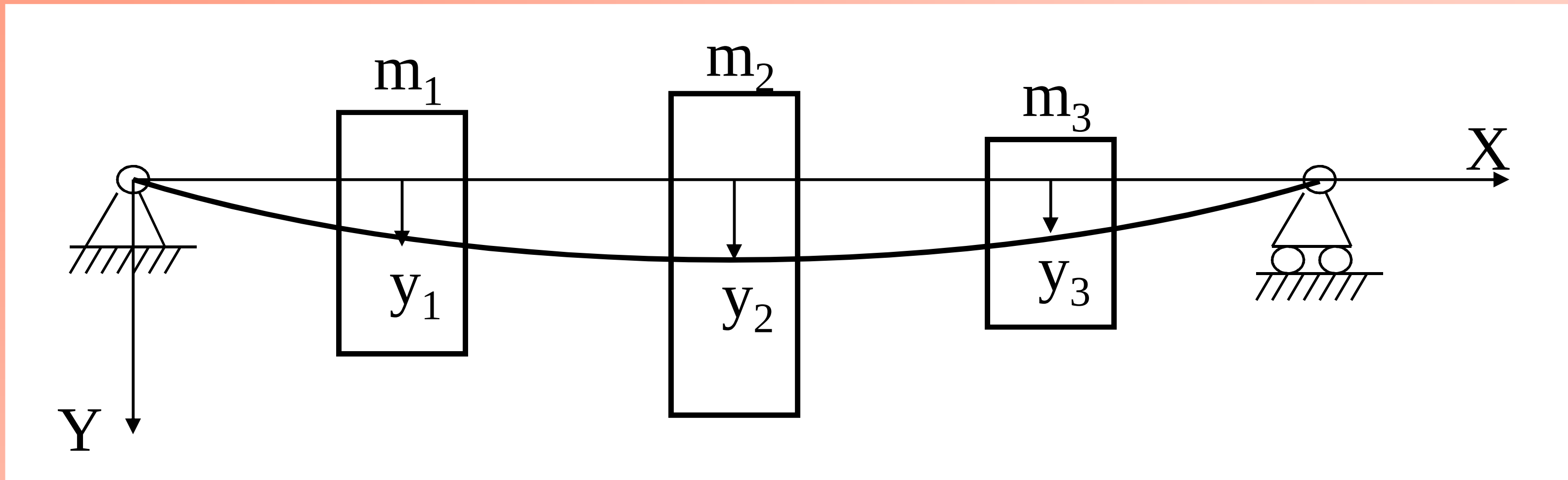
$$\frac{1}{2} \mu \omega_n^2 \int_0^L y^2 dx = \frac{1}{2} EI_f \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI_f \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\mu \int_0^L y^2 dx} = \frac{EI_f \int_0^L \left(y_0 \frac{\pi^2}{L^2} sen(\frac{\pi x}{L})\right)^2 dx}{\mu \int_0^L \left(y_0 sen(\frac{\pi x}{L})\right)^2 dx} = \frac{EI_f}{\mu} \frac{\pi^4}{L^4}$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_f}{\mu}}}$$



ω_n de flexión en árboles con masas concentradas



$$Ep_{MAX} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i g y_i$$

$$Ec_{MAX} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \omega_n^2 y_i^2$$

Método de Rayleigh,

$Ec_{MAX} = Ep_{MAX}$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i g y_i = \frac{1}{2}\omega_n^2 \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

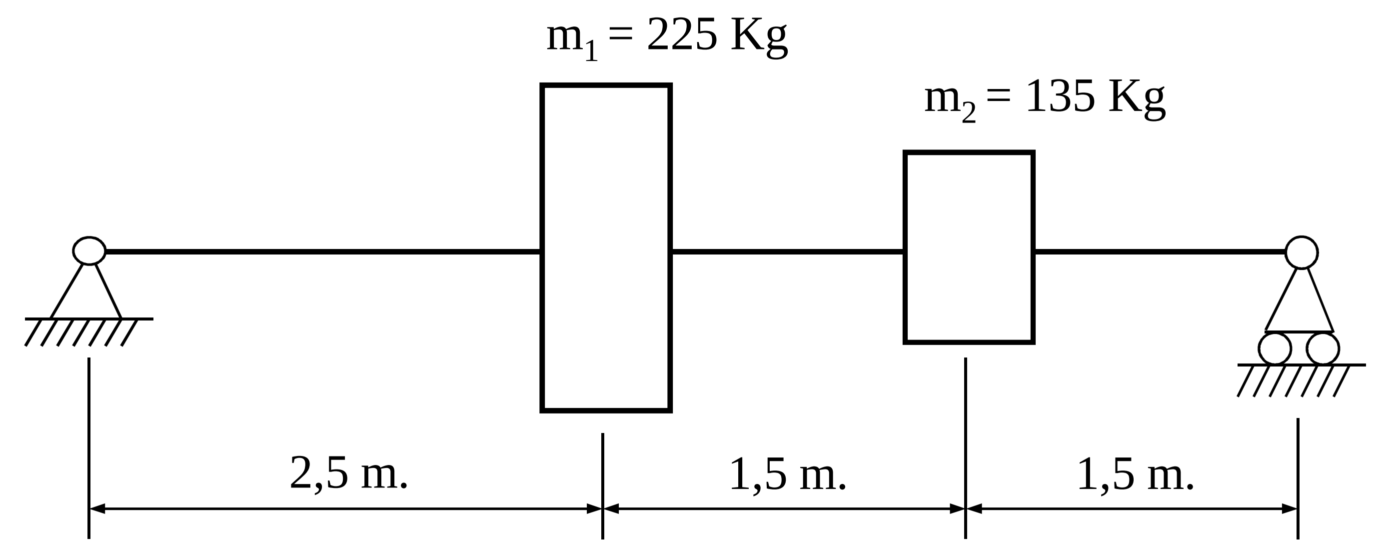
$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}}}$$

Caso práctico 1

Enunciado:

Cálculo de la frecuencia natural del árbol de transmisión de la figura, con los datos que aparecen a continuación:

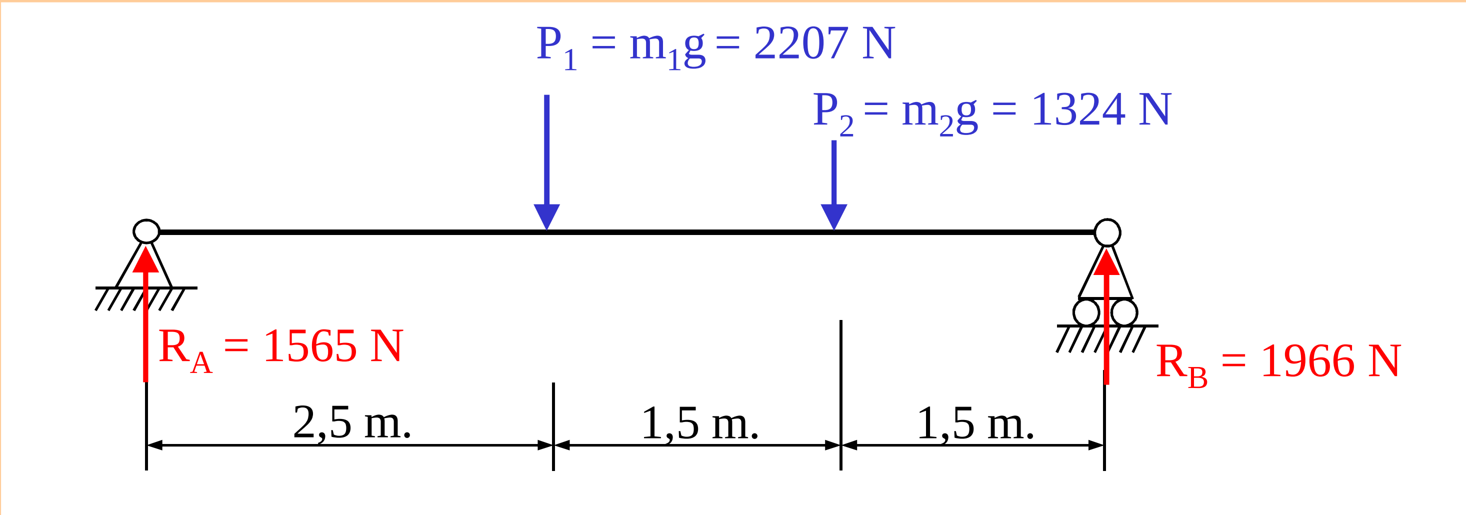
- Diámetro del árbol, d = 50 mm.
- Módulo de Young del material, $E = 2{,}1E^{11}\ N/m^2$.
- Despréciese el efecto de la masa del árbol.



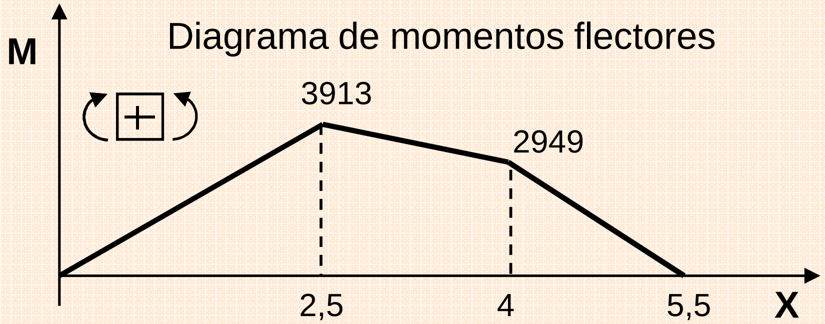
Caso práctico 1

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i^2}}$$

A) Cálculo de los desplazamientos y_1 e y_2



Caso práctico 1



$$M\Big|_0^{2,5} = 1565x$$

$$M\Big|_{2,5}^{4} = 1565x - 2207(x-2,5) = -642x + 5518$$

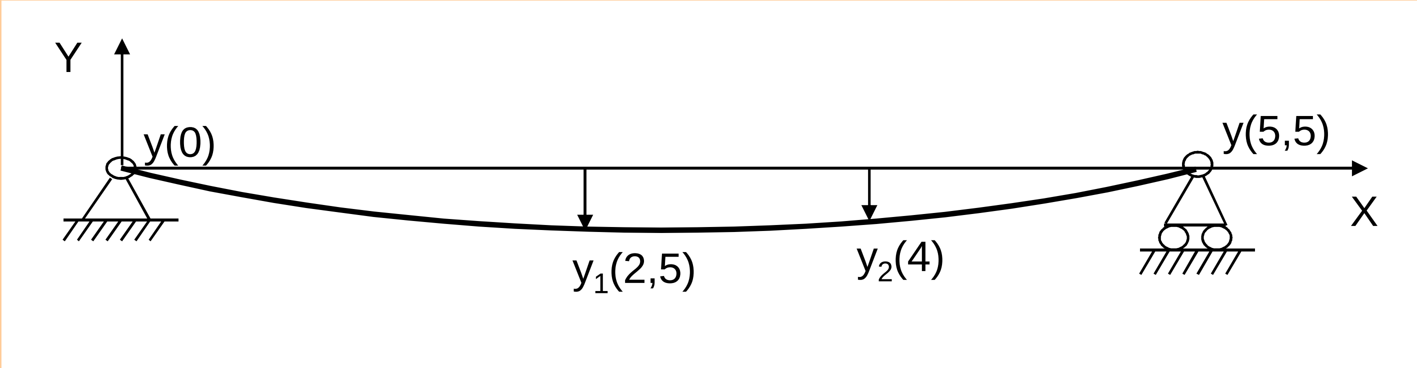
$$M\Big|_{4}^{5,5} = -642x + 5518 - 1324(x-4) = -1966x + 10813$$

$$M = EI\frac{1}{\rho} = EI\frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_0^{2,5} = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1565}{2}x^2 + C_1\right) \\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{2,5}^{4} = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{642}{2}x^2 + 5518x + C_2\right) \\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{4}^{5,5} = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1966}{2}x^2 + 10813x + C_3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\Big|_0^{2,5} = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1565}{6}x^3 + C_1x + K_1\right) \\ y\Big|_{2,5}^{4} = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{642}{6}x^3 + \dfrac{5518}{2}x^2 + C_2x + K_2\right) \\ y\Big|_{4}^{5,5} = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1966}{6}x^3 + \dfrac{10813}{2}x^2 + C_3x + K_3\right) \end{cases}$$

Caso práctico 1



Condiciones de contorno

- Apoyos del árbol

$$y\Big|_0^{2,5}(0)=0$$

$$y\Big|_4^{5,5}(5,5)=0$$

- Continuidad en x=2,5 m.

$$y\Big|_0^{2,5}(2,5)=y\Big|_{2,5}^{4}(2,5)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_0^{2,5}(2,5)=\frac{dy}{dx}\Big|_{2,5}^{4}(2,5)$$

- Continuidad en x=4 m.

$$y\Big|_{2,5}^{4}(4)=y\Big|_4^{5,5}(4)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{2,5}^{4}(4)=\frac{dy}{dx}\Big|_4^{5,5}(4)$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_1=0 \\ 109031+5{,}5C_3+K_3=0 \\ 4076+2{,}5C_1=15572+2{,}5C_2+K_2 \\ 4891+C_1=11789+C_2 \\ 37296+4C_2+K_2=65533+4C_3+K_3 \\ 16936+C_2=27524+C_3 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} K_1=0 \\ K_2=5750{,}132 \\ K_3=19876{,}629 \\ C_1=-5948{,}49 \\ C_2=-12847{,}372 \\ C_3=-23441{,}976 \end{array}}$$

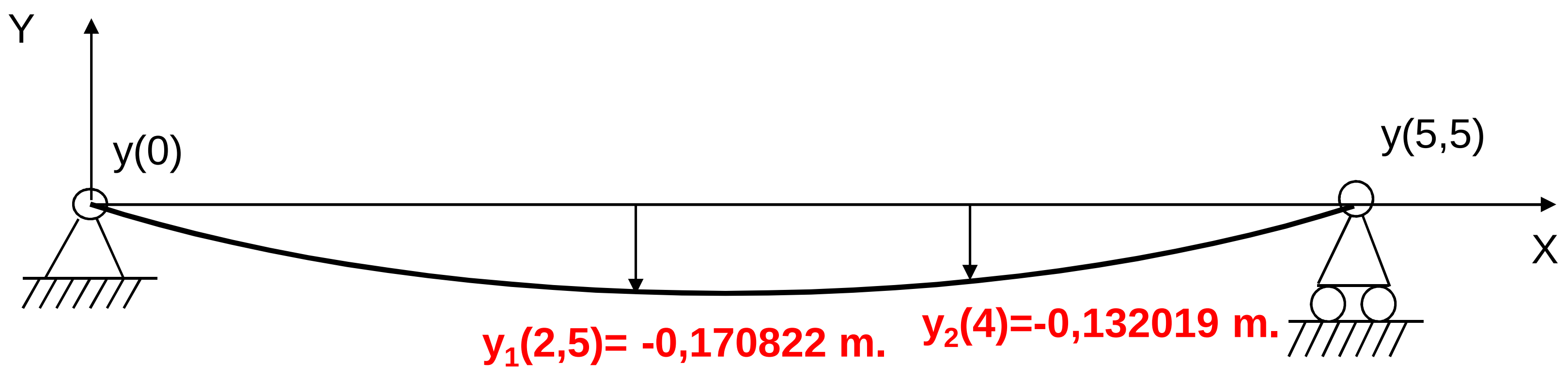
Caso práctico 1

$$y\Big|_{0}^{2,5} = \frac{1}{EI}\left(260,833x^{3} - 5948,49x\right)$$

$$y\Big|_{2,5}^{4} = \frac{1}{EI}\left(-107x^{3} + 2759x^{2} - 12847,372x + 5750,132\right)$$

$$y\Big|_{4}^{5,5} = \frac{1}{EI}\left(-327,667x^{3} + 5406,5x^{2} - 23441,976x + 19876,629\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} E = 2,1 \cdot 10^{11}\ \ N/m^{2} \\ I = \dfrac{\pi d^{4}}{64} = \dfrac{\pi 0,05^{4}}{64} = 3,06796 \cdot 10^{-7}\ \ m^{4} \end{array}\right\} EI = 64427,193091\ \ Nm^{2}$$



Caso práctico 1

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i^2}} = \sqrt{\frac{g\left(m_1 y_1 + m_2 y_2\right)}{\left(m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2\right)}}$$

m_1 = 225 Kg. **y_1 = 0,170822 m.**

m_2 = 135 Kg. **y_2 = 0,132019 m.**

$$\omega_n = \sqrt{\frac{9{,}81(225 \cdot 0{,}170822 + 135 \cdot 0{,}132019)}{(225 \cdot 0{,}170822^2 + 135 \cdot 0{,}132019^2)}} = 7{,}866 \ \text{rad}/\text{s}.$$

ω_n = 7,866 rad/s.

Caso práctico 1

Comentario final:

¿Influencia de la masa del árbol?

ρ = 7800 Kg/m^3.

$$m = \rho V = \rho A L = \rho \frac{\pi d^2}{4} L = 7{,}8 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} 5{,}5 = 84{,}234 \text{Kg.}$$

$m_1 + m_2$ = 225 + 135 = 360 Kg.

Cálculo de frecuencias naturales a torsión

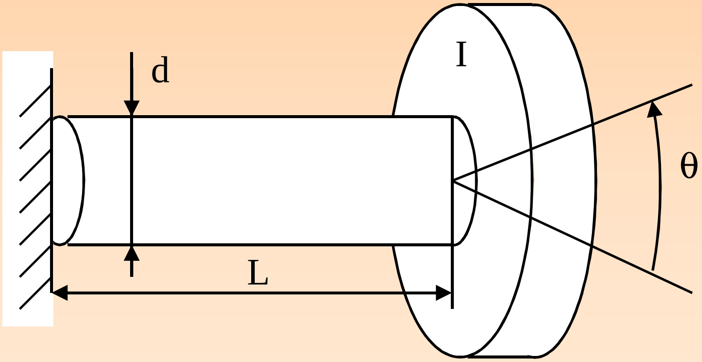
A) Árboles de sección constante y un extremo fijo.

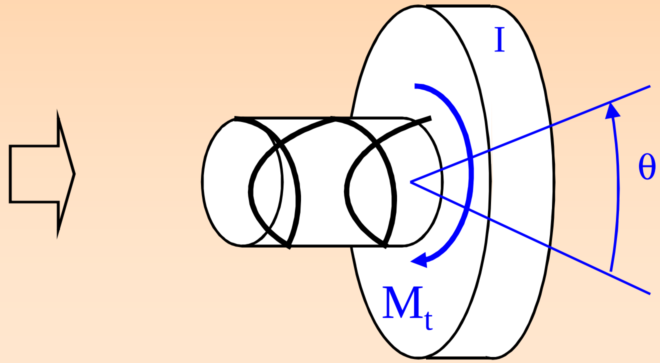
B) Árboles de sección constante y extremos libres.

C) Árboles de sección variable y un extremo fijo.

D) Tren de dos árboles de transmisión.

ω_n de torsión en árboles de sección constante y un extremo fijo





$$M_t = GI_0 \frac{\theta}{L} = K_t \theta$$

$$\boxed{K_t = \frac{GI_0}{L}}$$

$$\sum M = I\alpha$$

$$-K_t \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_t \theta = 0}$$

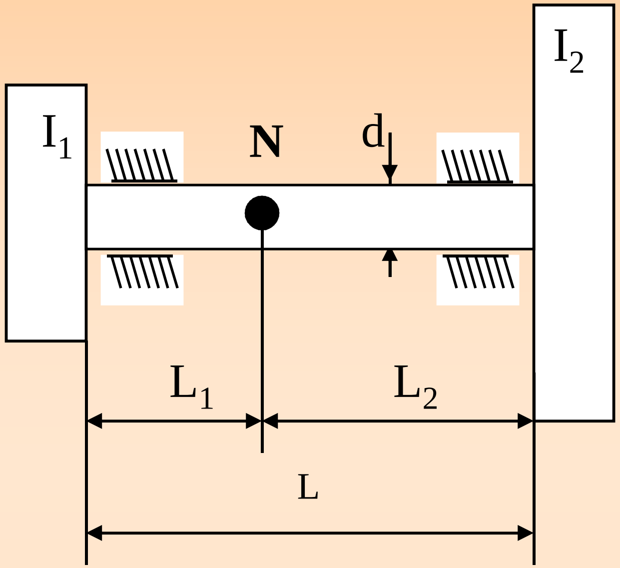
$$\theta = e^{rt}$$

$$Ir^2 + K_t = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{K_t}{I}}$$

$$\boxed{\theta = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I}}}$$

ω_n de torsión en árboles de sección constante y extremos libres



$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{I_1}} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K_2}{I_2}}$$

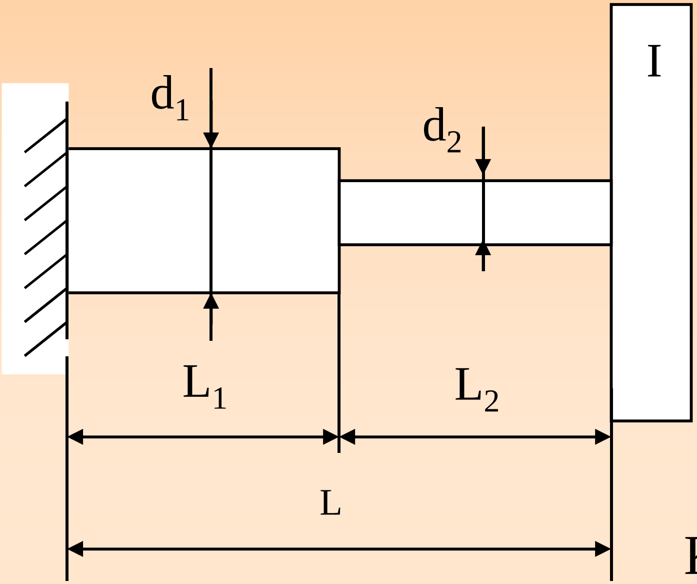
$$K_1 = \frac{GI_0}{L_1} \qquad K_2 = \frac{GI_0}{L_2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{K_2}{I_2}} \Rightarrow \frac{GI_0}{I_1 L_1} = \frac{GI_0}{I_2 L_2} \Rightarrow \frac{L_2}{I_1} = \frac{L_1}{I_2} = \frac{L_1 + L_2}{I_1 + I_2}$$

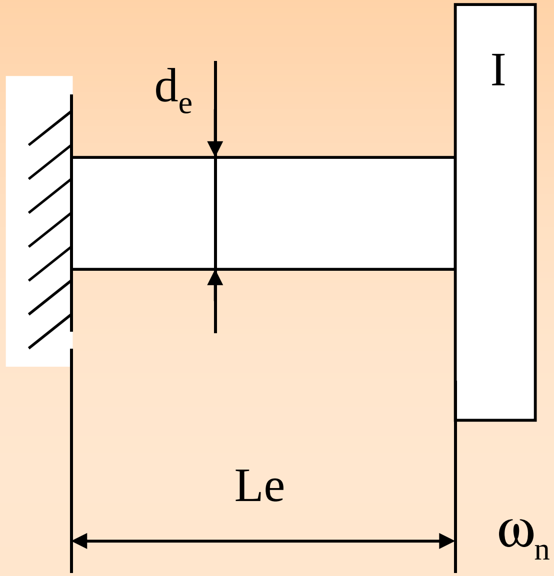
$$\begin{cases} L_1 = L\dfrac{I_2}{I_1 + I_2} \\ L_2 = L\dfrac{I_1}{I_1 + I_2} \end{cases}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{GI_0}{I_1 L_1}} = \sqrt{\frac{GI_0}{I_2 L_2}} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{GI_0}{L}\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}}$$

ω_n de torsión en árboles de sección variable y un extremo fijo



$$\equiv$$



$$K_i = \frac{GI_{0i}}{L_i}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_e}{I}}$$

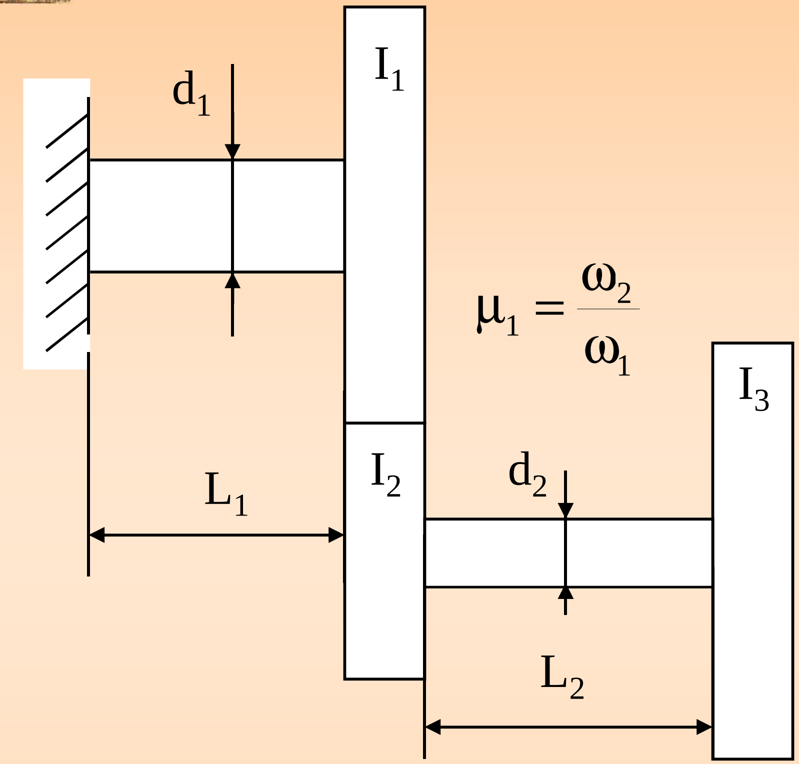
$$M = K_1\theta_1 = K_2\theta_2$$

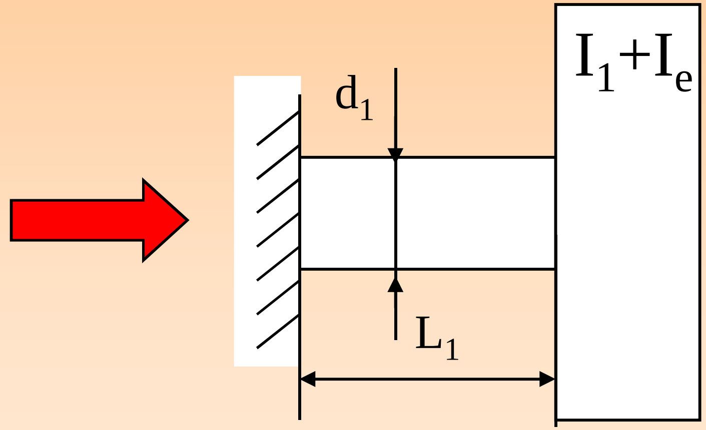
$$M = K_e\theta$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{M}{K_e} = \frac{M}{K_1} + \frac{M}{K_2} \rightarrow K_e = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} \rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_e}{I}} = \sqrt{\frac{1}{I}\frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}}}$$

ω_n de torsión en trenes de árboles de transmisión





$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{(I_1 + I_e)}} \qquad K_1 = \frac{GI_{01}}{L_1}$$

$$\boxed{I_e = (I_2 + I_3)\mu_1^2}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{(I_1 + I_e)}} = \sqrt{\frac{GI_{01}}{L_1}\frac{1}{[I_1 + (I_2 + I_3)\mu_1^2]}}}$$